Ministerul Educației și Cercetării

Centrul Național de Politici
și Evaluare în Educație

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 5

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

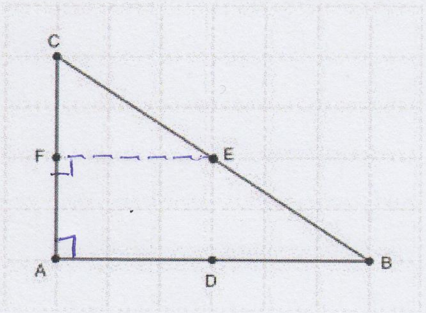
5p	**1.** Rezultatul calculului $2+3\cdot(4+5)$ este egal cu: **a)** 19 **b)** 20 **c)** 29 **d)** 45
5p	**2.** Știind că $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$, atunci rezultatul calculului $3x-2y$ este egal cu: **a)** 0 **b)** 1 **c)** 5 **d)** 12
5p	**3.** Suma numerelor întregi negative din intervalul $(-5;4]$ este egală cu: **a)** -15 **b)** -10 **c)** 0 **d)** 10
5p	**4.** Dintre numerele $\frac{2018}{2019}$, $\frac{2019}{2020}$, $\frac{2020}{2021}$ și $\frac{2021}{2022}$ cel mai mare este: **a)** $\frac{2018}{2019}$ **b)** $\frac{2019}{2020}$ **c)** $\frac{2020}{2021}$ **d)** $\frac{2021}{2022}$.
5p	**5.** Patru elevi au calculat media geometrică a numerelor $4\sqrt{2}$ și $2\sqrt{2}$ și au obținut rezultatele înregistrate în tabelul de mai jos. Ana: 4 Andrei: $3\sqrt{2}$ Anca: 8 Alin: 16 Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media geometrică este: **a)** Ana **b)** Andrei **c)** Anca **d)** Alin
5p	**6.** Ana are 14 ani, iar fratele ei are 10 ani. Ana afirmă că: „ Peste trei ani, suma dintre vârsta mea și a fratelui meu va fi egală cu 27 de ani ”. Afirmația Anei este: **a)** adevărată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

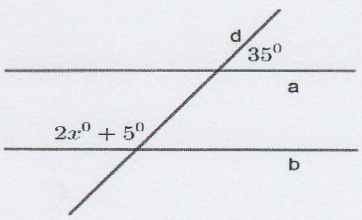
5p **1.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC dreptunghic în A, iar punctele D, E și F sunt mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Proiecția punctului E pe AC este punctul:

- **a)** A
- **b)** C
- **c)** D
- **d)** F



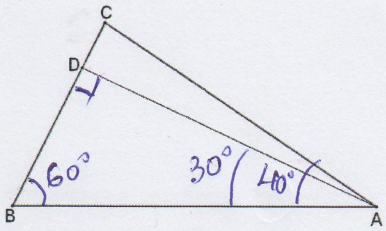
5p **2.** În figura alăturată, dreptele paralele a și b sunt intersectate de secanta d, fiind evidențiate măsurile a două unghiuri de $35°$ și de $2x° + 5°$. Valoarea lui x este de:

- **a)** $15°$
- **b)** $25°$
- **c)** $70°$
- **d)** $75°$



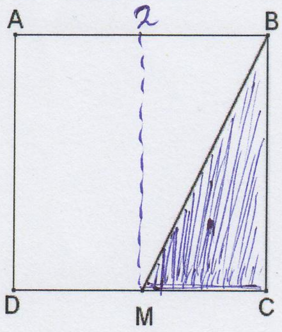
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $\sphericalangle ABC = 60°$ și $\sphericalangle BAC = 40°$. Punctul D aparține dreptei BC, astfel încât distanța dintre punctul A și punctul D să fie minimă. Măsura unghiului $\sphericalangle DAC$ este de:

- **a)** 10^o
- **b)** 30^o
- **c)** 80^o
- **d)** 90^o



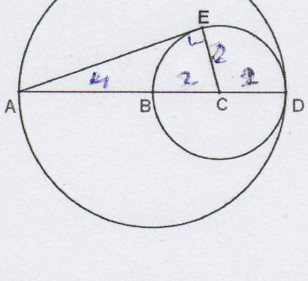
5p **4.** În figura alăturată este reprezentată schița unei foi de tablă în formă de pătrat $ABCD$, cu $AB = 2\text{m}$. Un tinichigiu vrea să taie din tablă o bucată în forma triunghiului BMC, unde punctul M aparține dreptei DC, astfel încât aria triunghiului BMC să fie un sfert din aria pătratului $ABCD$. Lungimea segmentului CM este egală cu:

- **a)** $0{,}25\text{m}$
- **b)** $0{,}5\text{m}$
- **c)** 1m
- **d)** $1{,}5\text{m}$

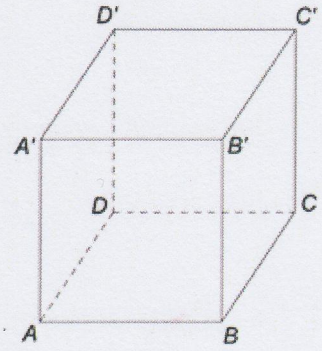


5p **5.** În figura alăturată, BD este raza cercului mare de centru B, $CD = 2\text{cm}$ este raza cercului mic de centru C, punctele A, B, C, D sunt coliniare și punctul E aparține cercului mic, astfel încât dreapta CE este perpendiculară pe dreapta AE. Distanța dintre punctele A și E este egală cu:

- **a)** 4cm
- **b)** $4\sqrt{2}\,\text{cm}$
- **c)** $4\sqrt{3}\,\text{cm}$
- **d)** 6cm



5p	**6.** În figura alăturată este reprezentată o cutie în formă de cub *ABCDEFGH* care are suma lungimilor tuturor muchiilor egală cu $60\,\text{cm}$. Volumul cutiei este egal cu: **a)** $25\,\text{cm}^3$ **b)** $100\,\text{cm}^3$ **c)** $125\,\text{cm}^3$ **d)** $150\,\text{cm}^3$



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

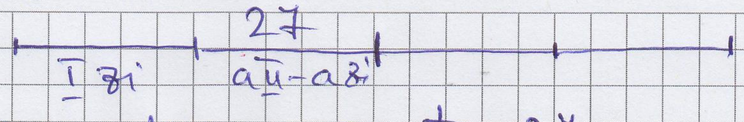
5p **1.** Radu a citit în prima zi $\frac{1}{4}$ din cartea pe care a primit-o de ziua lui de la Andreea. A doua zi citește 27 de pagini și constată că a citit jumătate din paginile cărții.

(2p) a) Este posibil să aibă 100 de pagini cartea pe care a primit-o Radu de ziua lui de la Andreea? Justifică răspunsul dat.

Dacă ar avea 100 de pagini, atunci în prima zi citește $\frac{1}{4} \cdot 100 = 25$ pagini, iar a doua zi încă 27 pagini, înseamnă că jumătatea cărții are $25 + 27 = 52$ de pagini, deci cartea ar trebui să aibă 104 pagini, nu 100.
Deci nu e posibil să aibă 100 pagini cartea.

(3p) b) Determină numărul de pagini din cartea lui Radu.

Metoda I:



Deci $\frac{1}{4}$ din nr. de pagini este 27.
Cartea are $27 \cdot 4 = 108$ pagini.

Metoda a II-a:
Notăm cu x nr. de pagini
$\frac{1}{4} \cdot x + 27 = \frac{1}{2} \cdot x \;\Big|\cdot 4 \iff$
$\iff x + 108 = 2x \iff x = 108$
R. Cartea are 108 pagini.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=(x-1)^2-(x-2)^2+(1-x)^2-(2-x)^2$, unde x este număr real.

(3p) a) Arată că $E(x)=4x-6$, pentru orice număr real x.

$(a-b)^2=(b-a)^2=a^2-2ab+b^2$

Deci $(x-1)^2=(1-x)^2$ și $(x-2)^2=(2-x)^2$ și

atunci $E(x)=2(x-1)^2-2(x-2)^2=$

$=2[(x-1)^2-(x-2)^2]=2[(x-1)-(x-2)][(x-1)+$

$+(x-2)]=2(\cancel{x}-1-\cancel{x}+2)(x-1+x-2)=$

$=2\cdot 1(2x-3)=4x-6$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Sau $E(x)=x^2-2x+1-(x^2-4x+4)+(1-2x+x^2)-$

$-(4-4x+x^2)=\cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}+4x-4+$

$+1-2x+\cancel{x^2}-4+4x-\cancel{x^2}=4x-6$, pentru

orice $x\in\mathbb{R}$. Deci $E(x)=4x-6$, pt. orice $x\in\mathbb{R}$.

(2p) b) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația: $2-E(x)\le 0$.

$2-E(x)\le 0,\ x\in\mathbb{R} \iff 2-(4x-6)\le 0 \iff$

$\iff 2-4x+6\le 0 \iff -4x\le -2-6 \iff$

$\iff -4x\le -8 \ |\cdot(-1) \iff 4x\ge 8 \iff$

(<0 ineg. se răstoarnă)

$\iff x\ge \frac{8}{4} \iff x\ge 2 \iff x\in[2;+\infty)$; $S=[2;+\infty)$.

5p **3.** Se consideră numerele reale $a=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right):\frac{1}{2}$ și $b=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$.

(2p) a) Arată că $a=\frac{16}{15}$.

$a=\left(\frac{^{5)}1}{3}+\frac{^{3)}1}{5}\right):\frac{1}{2}=\frac{5+3}{15}\cdot\frac{2}{1}=$

$=\frac{8}{15}\cdot\frac{2}{1}=\frac{16}{15}$, q.e.d.

(3p) b) Arată că numărul a este de 16 ori mai mare decât numărul b.

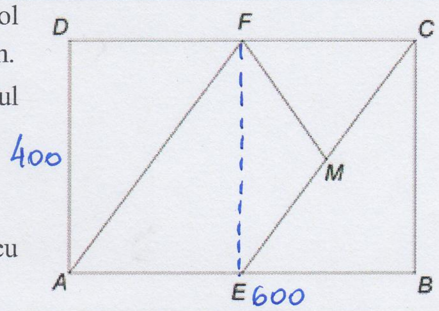
$$b = \frac{1}{2}\cdot\left(\,^{5)}\frac{1}{3} - \,^{3)}\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5-3}{15} = \frac{1}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{\cancel{2}^{1}}{15} = \frac{1}{15}$$

Deci $a = \frac{16}{15}$ și $b = \frac{1}{15}$

$a = 16b \iff \frac{16}{15} = 16\cdot\frac{1}{15} \iff \frac{16}{15} = \frac{16}{15}$ (A).

Deci $a = 16b$, q.e.d.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentată schița unui teren agricol în formă de dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 600\,\text{m}$ și $AD = 400\,\text{m}$. Punctul E este mijlocul laturii AB, punctul F este mijlocul laturii CD și punctul M este mijlocul segmentului CE.



(2p) a) Arată că perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este egal cu $2000\,\text{m}$.

$ABCD$: dreptunghi. $L = AB = 600\,m$;
$l = AD = 400\,m$.

$P_{ABCD} = 2(L + l) = 2(600 + 400) = 2\cdot 1000 =$
$= 2000\,m$, q.e.d.

(3p) b) Arată că aria patrulaterului $AEMF$ este de trei ori mai mare decât aria triunghiului CFM.

E: mijlocul lui $[AB]$; F: mijlocul lui $[CD]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow EBCF$: dreptunghi. $\mathcal{A}_{\Delta FEC} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{EBCF} = \frac{1}{2}\cdot 300\cdot 400 =$

$= \frac{120000}{2} = 60000\,(m^2)$. $\left(EB = \frac{AB}{2} = \frac{600}{2} = 300\,(m)\right)$.

sau $\mathcal{A}_{AEFD} = \mathcal{A}_{EBCF} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{\cancel{2}_{1}}\cdot \cancel{600}^{300}\cdot 400 = 120000\,(m^2)$

$\mathcal{A}_{AEF} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{AEFD} = \frac{1}{2}\cdot 120000 = 60000\,(m^2)$.

(1) FM: mediană în $\Delta FEC \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta FEM} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\Delta FEC} = \frac{60000}{2} =$
$= 30000\,(m^2)$. Avem $\mathcal{A}_{AEMF} = \mathcal{A}_{\Delta AEF} + \mathcal{A}_{\Delta FEM} = 60000 +$
$+ 30.000 = 90000\,(m^2)$

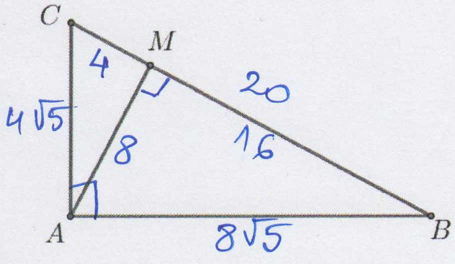
(1) $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta CFM} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\Delta FEC} = 30.000\,(m^2)$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{AEMF} = 90.000 = 3\cdot 30.000 = 3\cdot\mathcal{A}_{\Delta CFM}$, q.e.d.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A, iar punctul M este proiecția punctului A pe BC. Lungimea segmentului BM este de 16cm, iar lungimea segmentului CM este de 4cm.

(2p) a) Arată că $AM = 8\text{cm}$.

$pr_{BC} A = M \Rightarrow AM \perp BC$.
Cu T. înălțimii avem
$AM^2 = BM \cdot CM = 16 \cdot 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow AM = \sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{4} =$
$= 4 \cdot 2 = 8\ (\text{cm})$, q.e.d.



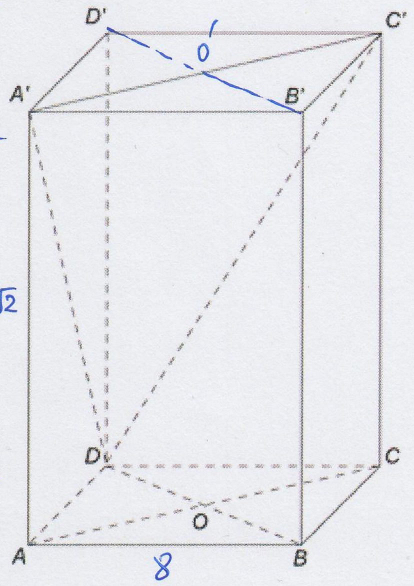
(3p) b) Demonstrează că perimetrul triunghiului ABC este mai mare decât 44cm.

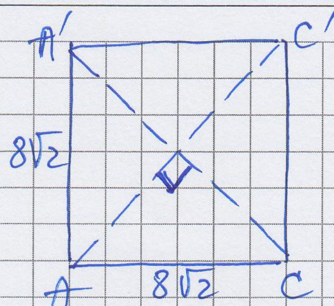
$BC = BM + MC = 16 + 4 = 20\ (\text{cm})$
Cu T. catetei avem $AB^2 = BM \cdot BC = 16 \cdot 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = \sqrt{16 \cdot 20} = \sqrt{16 \cdot 4 \cdot 5} = 4 \cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}\ (\text{cm})$
$AC^2 = CM \cdot BC = 4 \cdot 20 \Rightarrow AC = \sqrt{4 \cdot 20} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 5} = 4\sqrt{5}\ (\text{cm})$
$P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = 8\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 20 = 12\sqrt{5} + 20\ (\text{cm}) > 44$
pentru că: $12\sqrt{5} + 20 \boxed{>} 44 \Leftrightarrow 12\sqrt{5} \boxed{>} 24 \Leftrightarrow \sqrt{5} \boxed{>} 2 \Leftrightarrow 5 \boxed{>} 4$ (A)

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătratul $ABCD$. Punctul O este intersecția dreptelor AC și BD, $AB = 8\text{cm}$ și $AA' = 8\sqrt{2}\text{cm}$.

(2p) a) Demonstrează că dreptele $A'C$ și AC' sunt perpendiculare.

$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ pătrat} \\ AB = 8\text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow AC = 8\sqrt{2}\text{ cm} =$
$= A'C'$
Atunci $ACC'A'$ este pătrat deoarece are toate laturile egale cu $8\sqrt{2}$ și în plus $\left.\begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow$
$\Rightarrow A'A \perp AC$.
Atunci $A'C$ și AC', fiind diagonalele pătratului $ACC'A'$, sunt perpendiculare, q.e.d.





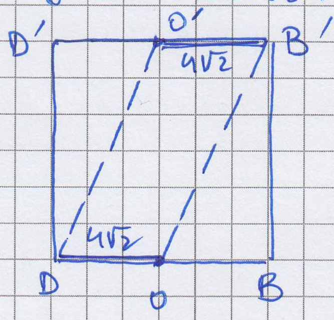
Diagonalele unui pătrat sunt perpendiculare, sunt congruente și se înjumătățesc.

(3p) b) Demonstrează că dreapta OB' este paralelă cu planul $(A'C'D)$.

O dreaptă este paralelă cu o planul dacă este paralelă cu o dreaptă din plan.

La noi, vom demonstra că $OB' \parallel DO'$ unde $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$, iar $DO' \subset (A'C'D)$, de unde va rezulta că $OB' \parallel (A'C'D)$.

Într-adevăr $BB'D'D$ este pătrat și avem:



O': centrul pătratului $A'B'C'D'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow D'O' = O'B' = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ (cm)

O: centrul bazei $ABCD$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow DO = OB = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ (cm)

Deci $DO = O'B' = 4\sqrt{2}$ (cm.)
Pe de altă parte $DO \parallel O'B'$ $\Rightarrow DOB'O'$: paralelogram $\Rightarrow OB' \parallel DO'$

$O' \in A'C' \subset (A'C'D)$
$D \in (A'C'D)$ $\Rightarrow DO' \subset (A'C'D)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow OB' \parallel (A'C'D)$, q.e.d.

REZOLVĂRI, SUB. I și SUB. al II-lea:

I. 1) $2+3\cdot(4+5)=2+3\cdot9=2+27=29$

2) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=k \Rightarrow \begin{cases} x=2k \\ y=3k \end{cases} \Rightarrow 3x-2y=3\cdot2k-2\cdot3k=$
$=6k-6k=0$

3) $-5\quad -4\quad -3\quad -2\quad -1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4$

Nr. întregi negative din $(-5;4]$ sunt
$-4; -3; -2; -1$, iar suma lor este
$(-4)+(-3)+(-2)+(-1)=-4-3-2-1=-10$

4)
$$\frac{1}{2019}>\frac{1}{2020}>\frac{1}{2021}>\frac{1}{2022}$$

$$\frac{2018}{2019}+\frac{1}{2019}=1 \Rightarrow \frac{2018}{2019}=1-\frac{1}{2019}$$
$$\frac{2019}{2020}+\frac{1}{2020}=1 \Rightarrow \frac{2019}{2020}=1-\frac{1}{2020}$$
$$\frac{2020}{2021}+\frac{1}{2021}=1 \Rightarrow \frac{2020}{2021}=1-\frac{1}{2021}$$
$$\frac{2021}{2022}+\frac{1}{2022}=1 \Rightarrow \frac{2021}{2022}=1-\frac{1}{2022}$$
$\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2019}<1-\frac{1}{2020}<1-\frac{1}{2021}<1-\frac{1}{2022}$$
(pentru că din 1 scădem fracții „din ce în ce mai mici")

Deci $\frac{2021}{2022}>\frac{2020}{2021}>\frac{2019}{2020}>\frac{2018}{2019}$ etc.

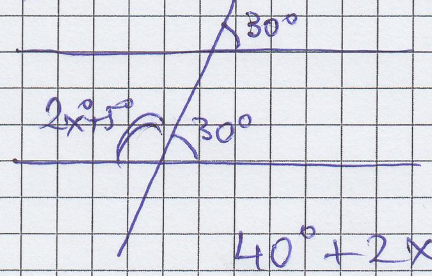
Deci cel mai mare nr. din șirul dat e $\frac{2021}{2022}$.

Obs: Puteam face o judecată similară pentru $\frac{2}{3}\ \boxed{<}\ \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{8}{12}\ \boxed{<}\ \frac{9}{12}$ și din aproape în aproape: $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\frac{5}{6}<\ldots<\frac{2018}{2019}<$
$<\frac{2019}{2020}<\frac{2020}{2021}<\frac{2021}{2022}$.

II. 1. Proiecția unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei dusă din punct pe dreaptă.

I. 5) $m_g = \sqrt{ab} = \sqrt{4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \sqrt{8\cdot 2} = \sqrt{16} = 4$. (Ana)

II. 2) $35^\circ + 2x^\circ + 5^\circ = 180^\circ$ (Cele 2 unghiuri sunt suplementare)



$30^\circ = 30^\circ$ (corespondente)

$40^\circ + 2x^\circ = 180^\circ$; $2x^\circ = 180^\circ - 40^\circ$

$2x^\circ = 140^\circ$; $x = 140^\circ : 2$; $x = 70^\circ$

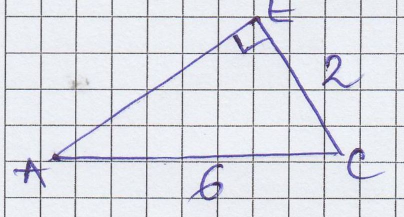
II. 3) $d(A;D)$ este minimă dacă $AD \perp BC$.
Atunci ΔDAB este dreptunghic în $D \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\widehat{BAD}) = 30^\circ$ ($= 90^\circ - 60^\circ$). Atunci $\widehat{DAC} =$
$= \widehat{BAC} - \widehat{BAD} = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ$

Obs: Cu ajutorul unui raportor, măsurând, sau chiar apreciind „ochiometric" observăm că $\widehat{DAC} = 10^\circ$.

II. 4) $CM = \frac{CD}{2} = \frac{2}{2} = 1$ (m)

II. 5) CE este rază $\Rightarrow CE = CD = 2$ cm

$AC = AB + BC = BD + BC = 2CD + CD = 3CD = 6$ (cm)



Cu T. Pitagora avem:
$AE^2 = AC^2 - EC^2 =$
$= 6^2 - 2^2 = (6-2)(6+2) = 4\cdot 8 =$
$= 4\cdot 4\cdot 2$; $AE = \sqrt{4\cdot 4\cdot 2} = 4\sqrt{2}$ (cm)

II. 6) Cubul are 12 muchii; $12x = 60 \Rightarrow x = 5$ cm.
Fiecare muchie are 5 cm.

$V = x^3 = 5^3 = 125$ (cm^3)